Apprendre son cours : la convexité

1) Définition d'une fonction convexe
2) Formule généralisée avec toutes les hypothèses.
3) Caractérisation dans le cas f dérivable? dans le cas f deux fois dérivable?
4) Position des cordes ? des tangentes?
5) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1+x$
6) Vrai ou faux?
   a) toute fonction convexe sur I admet un minimum sur I.
   b) toute fonction f impaire, convexe et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifie $f''=0$ sur $\mathbb{R}$.
   c) la fonction arctan est convexe sur $\mathbb{R}$.
   d) toute fonction qui n'est pas convexe est concave.
   e) si f est convexe sur $\mathbb{R}$, alors la fonction g définie par $g(x)=f(-x)$ est concave
   f) si f est convexe de I dans J et g est convexe de J dans K, alors gof est convexe.
   g) la fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$.
   h) si f est convexe sur I alors la fonction g définie par $g(x)=\exp(f(x))$ est convexe sur I.
   i) si f est convexe et strictement positive sur I alors la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ est convexe sur I.
   j) si f est convexe sur I et $a \in \mathbb{R}$, alors la fonction g définie par $g(x)=af(x)$ est convexe sur I.

7) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ at $a_1,a_2,...,a_n$ n réels strictement positifs; montrer que $\sqrt[n]{a_1a_2..a_n} \leq \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt[n]{n!} \leq \dfrac{n+1}{2}$.

8) Montrer que $\forall x \in \left[\dfrac{1}{e},1\right], \quad \ln x \geq \dfrac{e}{e-1}(x-1)$

9) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x \leq \dfrac{x}{e}$

10) Déterminer la concavité de la fonction $f(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$; préciser ses points d'inflexion ainsi que la tangente à la courbe en ces points.

11) On pose $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$; déterminer le domaine de f et étudier sa concavité; préciser ses points d'inflexion ainsi que la tangente à la courbe en ces points.

12) Montrer que $\forall x \in [1,2], \quad \sqrt{x} \geq (\sqrt{2}-1)x \ +2-\sqrt{2}$

13) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x^3 \geq 3x-2$

14) Montrer que $\forall x \in \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right], \quad \text{Arctan}\, x \geq \dfrac{\pi}{4}x$

15) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \text{Arctan}\, x \leq \dfrac{1}{2}x \ +\dfrac{\pi-2}{4}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \text{Arctan}\, x \leq x$.

Correction

1 à 4) dans le cours

5) La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ et donc sa courbe est au dessus de ses tangente; l'équation de la tangente en 0 est $y=x+1$, d'où le résultat.

6) a) Faux, il suffit de prendre la fonction exp qui n'a pas de minimum (rappel est minimum est une valeur atteinte par la fonction)

b) Vrai: si f est impaire , sa fonction dérivée est paire et sa fonction dérivée seconde est impaire; de plus $f''\geq 0$ car f est convexe sur $\mathbb{R}$; on a donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=-f''(-x)$ et ces nombres sont tous deux positifs, donc ils sont nuls. Finalement $f''=0$. et donc f est affine $f(x)=ax+b$)

c) Faux : Arctan est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\arctan''(x)=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$; donc arctan est convexe sur $\mathbb{R}_-$ et concave sur $\mathbb{R}_+$.

d) Sur $\mathbb{R}$ cos n'est ni convexe ni concave.

e) Faux : calculons pour $\lambda\in[0,1]$

$g\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)=f\left(-\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\right)=f\left(\lambda(-x)+(1-\lambda)(-y)\right)\leq\lambda f(-x)+(1-\lambda)f(-y)$ car f est convexe sur $\mathbb{R}$; on a donc $g\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$: g est convexe sur $\mathbb{R}$.

NB : si on sait que f est deux fois dérivable, on peut utiliser la caractérisation utilisant la dérivée seconde: $g'(x)=-f'(-x)$ et $g''(x)=f''(-x)$, or $f''\geq 0$ donc $g''\geq 0$.

f) C'est faux: on a prouvé ensemble que si g est décroissante convexe et et f convexe alors $g\circ f$ est concave.

g) Vrai : soient deux réel x et y et $\lambda\in[0,1]$: par inégalité triangulaire :

$|\lambda x+(1-\lambda)y|\leq|\lambda x|+|(1-\lambda)y|=\lambda|x|+(1-\lambda)|y|$ car $\lambda\geq 0$ et $1-\lambda\geq 0$.

h) oui car exp est une fonction croissante et convexe: on écrit

$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ car f convexe, puis on compose par exp qui est croissante:

$\exp\left[f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\right]\leq\exp\left[\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\right]$ et enfin on utilise que exp est convexe:

$\exp\left[\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\right]\leq\lambda\exp\left(f(x)\right)+(1-\lambda)\exp\left(f(y)\right)$; on a bien prouvé que $\exp\circ f$ est convexe.

i) faux, prendre par exemple sur $I=\mathbb{R}_+^*$: $f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$, alors

$g(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+2}$, $g'(x)=\dfrac{-2x+2}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$ et $g''(x)=\dfrac{2\left(x^2-2x+2\right)\left(3(x-1)^2-1\right)}{\left(x^2-2x+2\right)^4}$ qui n'a pas un signe constant.

j) af est convexe si a positif (ou nul) et concave sinon car alors en multipliant par a on change le sens de l'inégalité.

7) a) La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$\ln\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\geq\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(a_i)=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(a_i^{1/n}\right)=\ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{1/n}\right)$; par croissance du ln, on a le résultat:

$\sqrt[n]{a_1a_2..a_n}\leq\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$.

b) Il suffit de choisir $a_i=i$, alors $\sum_{i=1}^{n}a_i=\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\prod_{i=1}^{n}a_i=n!$

8) On a exprimé que la courbe est située au dessus de sa corde (ln est concave) entre les points $A\left(\frac{1}{e},-1\right)$ et $B(1,0)$.

9) Bien sûr il fallait lire $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ pour que ln x existe…on a exprimé que la courbe est au dessous de sa tangente au point d'abscisse e.

10) cette fonction est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $f''(x)=(x^2-1)e^{\frac{-x^2}{2}}$ donc f est convexe sur $]-\infty,-1]$ et sur $[1,+\infty[$ et concave sur $[-1,1]$. f est paire donc on peut restreindre son étude à $\mathbb{R}_+$. Il y a un point d'inflexion d'abscisse 1 car la dérivée seconde s'annule et change de signe; l'équation de la tangente en ce point est $y=-e^{\frac{-1}{2}}(x-1)+e^{\frac{-1}{2}}=e^{\frac{-1}{2}}(-x+2)$.

11) f est définie sur $D=\mathbb{R}_+^*-\{1\}$; cette fonction est de classe C^∞ sur D, on trouve $f'(x)=-\frac{1}{x(\ln x)^2}$ et $f''(x)=\frac{\ln x(\ln x+2)}{\left[x(\ln x)^2\right]^2}$; comme $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ et $\ln x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-2}$, f est convexe sur $\left]0,e^{-2}\right]$ et sur $[1,+\infty[$ et concave sur $\left[e^{-2},1\right]$.
Il y a un seul point d'inflexion car en 1 la fonction n'est pas définie.
en A d'abscisse e^{-2}, l'équation de la tangente est $y=\frac{-1}{4e^{-2}}\left(x-e^{-2}\right)-\frac{1}{2}$.

12) La fonction racine est concave sur $\mathbb{R}_+$, on a écrit ici qu'elle au dessus de la corde joignant les points d'abscisses 1 et 2.

13) La fonction cube est convexe sur $\mathbb{R}_+$, on a écrit ici qu'elle au dessus de la tangente au point d'abscisse 1.

14) La fonction arctan est concave sur $\mathbb{R}_+$, on a écrit ici qu'elle au dessus de la corde joignant les points d'abscisses 0 et 1.

15) La fonction arctan est concave sur $\mathbb{R}_+$, on a écrit ici qu'elle au dessous de la tangente au point d'abscisse1, puis on a écrit qu'elle est au dessous de la tangente au point d'abscisse 0.